RACHUNEK RÓŻNICZKOWY - sprawdziany i kartkówki

klasa II 2018/19

Adam Stachura

Sprawdzian 3. Granice funkcji - przykładowe zadania

ZADANIE 1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(\dfrac{8x^3-1}{4x^2+6x-4}\right)$.

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji, której granice obliczamy, czyli funkcji

$$f(x)=\frac{8x^3-1}{4x^2+6x-4} \tag{2*}$$

jest tutaj zbiór

$$D=(-\infty,-2)\cup\left(-2,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right),$$

ponieważ mianownik we wzorze (2*) równy jest zeru dla $x=-2$ i dla $x=\frac{1}{2}$. (Stwierdzamy to rozwiązując równanie: $4x^2+6x-4=0$ metodami teorii trójmianów kwadratowych). Liczba $x_0=\frac{1}{2}$ nie należy do dziedziny D, lecz jest jej punktem skupienia, więc można mówić o granicy funkcji w tym punkcie.

Mianownik równy jest zeru w punkcie $\frac{1}{2}$. Skoro jednak licznik także zeruje się w tym punkcie:

$$8\left(\frac{1}{2}\right)^3-1=0,$$

możemy zapisać licznik i mianownik w wyrażeniu (2*) w postaci iloczynu, w którym jednym z czynników jest $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ i uprościć iloraz.

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia:

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

otrzymujemy:

$$8x^3-1=(2x)^3-1^3=(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(4x^2+2x+1\right).$$

Ponadto

$$4x^2+6x-4=4\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)$$

(tzw. postać iloczynowa trójmianu kwadratowego). Wobec tego

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{8x^3-1}{4x^2+6x-4}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left[\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(4x^2+2x+1\right)}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left[\frac{4x^2+2x+1}{2\,(x+2)}\right]=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{4x^2+2x+1}{2x+4}\right).$$

Teraz mamy:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{4x^2+2x+1}{2x+4}\right)=\frac{4\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}+1}{2\cdot\frac{1}{2}+4}=\frac{3}{5}.$$

Odpowiedź: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{8x^3-1}{4x^2+6x-4}\right)=\frac{3}{5}.$

ZADANIE 2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 7}\left(\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}\right).$

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji, której granice obliczamy, czyli funkcji

$$f\,(x)=\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} \tag{3*}$$

jest tutaj zbiór

$$D=\langle 3,7)\cup(7,+\infty)$$

(muszą być spełnione warunki: $x\geq 3$ ze względu na istnienie pierwiastka, $x\neq 7$ ze względu na mianownik). Liczba $x_0=7$ nie należy do dziedziny D, lecz jest jej punktem skupienia, więc można mówić o granicy funkcji w tym punkcie.

Zarówno licznik, jak też mianownik we wzorze (3*) jest równy zeru w punkcie $x_0=7$, co sugeruje sposób rozwiązywania jak w zadaniu **1**. Jednak tym razem nie chodzi o wielomiany (w każdym razie licznik wyrażenia (3*) nie jest wielomianem). Przekształcamy więc najpierw wzór (3*) pamiętając o wzorze skróconego mnożenia

$$(a-b)\,(a+b)=a^2-b^2.$$

Mamy:

$$f\left(x\right)=\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\left(\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}\right)\cdot\left(\frac{2+\sqrt{x-3}}{2+\sqrt{x-3}}\right)=$$

$$=\frac{2^2-\left(\sqrt{x-3}\right)^2}{\left(x-7\right)\left(x+7\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=\frac{4-\left(x-3\right)}{\left(x-7\right)\left(x+7\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=$$

$$=\frac{-\left(x-7\right)}{\left(x-7\right)\left(x+7\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=\frac{-1}{\left(x+7\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}.$$

Teraz obliczamy granicę:

$$\lim_{x\to 7} f\left(x\right)=\lim_{x\to 7}\left[\frac{-1}{\left(x+7\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}\right]=\frac{-1}{\left(7+7\right)\left(2+\sqrt{7-3}\right)}=-\frac{1}{56}.$$

Odpowiedź: $\lim\limits_{x\to 7}\left(\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}\right)=-\frac{1}{56}.$

ZADANIE 3. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}\right).$

Rozwiązanie. Zadanie upodobni się do poprzednich, gdy wprowadzimy nową zmienną:

$$x=t^6,$$

pamiętając przy tym o tym, że $x\to 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t\to 1$. Mamy więc:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}\right)=\lim_{t\to 1}\left(\frac{\sqrt{t^6}-1}{\sqrt[3]{t^6}-1}\right)=\lim_{t\to 1}\left(\frac{t^3-1^3}{t^2-1^2}\right)=$$

$$=\lim_{t\to 1}\left[\frac{\left(t-1\right)\left(t^2+t+1\right)}{\left(t-1\right)\left(t+1\right)}\right]=\lim_{t\to 1}\left(\frac{t^2+t+1}{t+1}\right)=\frac{3}{2}$$

(skorzystaliśmy ze wzorów skróconego mnożenia dla różnic a^3-b^3 oraz a^2-b^2).

Odpowiedź: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}\right)=\frac{3}{2}.$

ZADANIE 4. Zbadać granicę $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{1 - 16x^3}{4x^2 + 6x - 4} \right)$.

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji, której granicę obliczamy, czyli funkcji

$$f(x) = \frac{1 - 16x^3}{4x^2 + 6x - 4} \tag{4*}$$

jest tutaj zbiór

$$D = (-\infty, -2) \cup \left(-2, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right),$$

ponieważ mianownik we wzorze (3*) równy jest zeru dla $x = -2$ i dla $x = \frac{1}{2}$. (Stwierdzamy to rozwiązując równanie: $4x^2 + 6x - 4 = 0$ metodami teorii trójmianów kwadratowych). Liczba $x_0 = -2$ nie należy do dziedziny D, lecz jest jej punktem skupienia, więc można mówić o granicy funkcji w tym punkcie.

Istotna różnica pomiędzy tym zadaniem a poprzednimi polega na tym, że tutaj tylko mianownik wyrażenia (4*) zeruje się w punkcie $x_0 = -2$, a licznik jest dodatni:

$$1 - 16(-2)^3 = 129.$$

Oznacza to, że zastosowanie będzie mieć tu twierdzenie **5** o działaniach na granicach niewłaściwych (dwa ostatnie podpunkty), zob. tekst **Teoria12**, w połączeniu z wnioskiem **1**, zob. tekst **Teoria11**. Spodziewamy się tu granicy w sensie niewłaściwym - $\pm\infty$. Należy tylko ustalić znak. Warto pamiętać też o tym, że w takich sytuacjach, jak ta, granice jednostronne - lewostronna i prawostronna - mogą być różne!

Skoro licznik we wzorze (4*) jest dodatni w punkcie $x_0 = -2$, to na podstawie wniosku **1**, tekst **Teoria11**, dla argumentów x z odpowiednio dobranego (o małym promieniu) sąsiedztwa punktu $x_0 = -2$ ten licznik jest liczbą dodatnią, czyli $1 - 16x^3 > 0$. Co do mianownika, czyli trójmianu kwadratowego

$$w(x) = 4x^2 + 6x - 4, \tag{5*}$$

to dla argumentów x z odpowiednio dobranego (o małym promieniu) **lewostronnego** sąsiedztwa punktu $x_0 = -2$ ten mianownik jest liczbą dodatnią, czyli $4x^2 + 6x - 4 > 0$. Można to łatwo zauważyć po narysowaniu wykresu tego trójmianu, czyli odpowiedniej paraboli i po przyjrzeniu się, co się dzieje w sąsiedztwie lewostronnym punktu $x_0 = -2$. Można też niczego nie rysować, tylko zapisać trójmian (5*) w postaci iloczynowej

$$w(x) = 4(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

i zauważyć, że gdy x należy do lewostronnego sasiędztwa punktu -2, to $x < -2$, więc $x + 2 < 0$ oraz $x - \frac{1}{2} < 0$, no a "minus razy minus daje plus", więc $w(x) > 0$.

Wynika stąd, że obliczając granicę **lewostronną** funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0 = -2$ dzielimy liczby dodatnie przez dodatnie, co prowadzi do wniosku, że

$$\lim_{x\to -2^-} \left(\frac{1-16x^3}{4x^2+6x-4} \right) = +\infty.$$

W podobny sposób stwierdzamy, że dla argumentów x z odpowiednio dobranego (o małym promieniu) **prawostronnego** sąsiedztwa punktu $x_0 = -2$ mianownik we wzorze (4*) jest liczbą ujemną, czyli $4x^2 + 6x - 4 < 0$. Wynika stąd, że obliczając granicę **prawostronną** funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0 = -2$ dzielimy liczby dodatnie przez ujemne, co prowadzi do wniosku, że

$$\lim_{x\to -2^+} \left(\frac{1-16x^3}{4x^2+6x-4} \right) = -\infty.$$

Granice - lewostronna i prawostronna są różne, co oznacza, że granica $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ nie istnieje nawet w niewłaściwym sensie.

Odpowiedź: Granica $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ nie istnieje, natomiast $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$.

ZADANIE 5. Zbadać granicę $\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{x^2+6x+9}{x^2-9} \right)$.

Rozwiązanie. Ponieważ licznik i mianownik we wzorze

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-6x+9}$$

zeruje się w punkcie $x_0 = 3$, więc zaczynamy jak w zadaniu **3**:

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-6x+9} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x-3)} = \frac{x+3}{x-3}.$$

Teraz zauważamy, że dla $x_0 = 3$ mianownik $x - 3$ zeruje się, $3 - 3 = 0$, zaś licznik jest dodatni, $3 + 3 = 6 > 0$. Dlatego od tego miejsca rozumujemy jak w zadaniu **4**, stwierdzając, że (szczegóły pomijam):

$$\lim_{x\to 3^-} \left(\frac{x+3}{x-3} \right) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 3^+} \left(\frac{x+3}{x-3} \right) = +\infty.$$

Odpowiedź: Granica $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-9}\right)$ nie istnieje, natomiast

$$\lim_{x\to 3^-}\left(\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}\right)=-\infty, \qquad \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}\right)=+\infty.$$

ZADANIE 6. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x^3-2x^2+5}{\frac{1}{2}x^3+4x^2+x}\right)$.

Rozwiązanie. Tego typu "granice w nieskończoności" obliczamy w sposób niemal identyczny jak granice ciągów liczbowych. Dzieląc licznik i mianownik we wzorze

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2+5}{\frac{1}{2}x^3+4x^2+x}$$

przez x w potędze o najwyższym wykładniku spośród występujących w mianowniku, czyli przez x^3, otrzymujemy:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^3-2x^2+5}{\frac{1}{2}x^3+4x^2+x}\right)=\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}+\frac{4x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}}\right)=\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}}{\frac{1}{2}+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=$$

$$=\frac{1-0+0}{\frac{1}{2}+0+0}=2,$$

ponieważ przy $x\to -\infty$ mamy:

$$\frac{2}{x}\to 0, \quad \frac{5}{x^3}\to 0, \quad \frac{4}{x}\to 0, \quad \frac{1}{x^2}\to 0$$

(zobacz tekst **Teor13** "pożyteczne wzory").

Odpowiedź: $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x^3-2x^2+5}{\frac{1}{2}x^3+4x^2+x}\right)=2.$

ZADANIE 7. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, gdzie

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}+3)^2}.$$

Rozwiązanie. Tego typu "granice w nieskończoności" obliczamy w sposób niemal identyczny jak granice ciągów liczbowych. Mamy:

$$f(x) = \frac{x-1}{4x + 12\sqrt{x} + 9}. \tag{6*}$$

Dzieląc licznik i mianownik we wzorze (6*) przez x w potędze o najwyższym wykładniku spośród występujących w mianowniku, czyli przez x, otrzymujemy:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{4x+12\sqrt{x}+9}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{4x}{x}+\frac{12\sqrt{x}}{x}+\frac{9}{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{4+\frac{12}{\sqrt{x}}+\frac{9}{x}}\right) =$$

$$= \frac{1-0}{4+0+0} = \frac{1}{4},$$

ponieważ przy $x \to +\infty$ mamy:

$$\frac{1}{x} \to 0, \qquad \frac{12}{\sqrt{x}} \to 0, \qquad \frac{9}{x} \to 0$$

(zobacz tekst **Teor13** "pożyteczne wzory").

Odpowiedź: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{4}$.

ZADANIE 8. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, gdzie

$$f(x) = \frac{3x+4}{\sqrt{4x^2+1}+5x}. \tag{7*}$$

Rozwiązanie. Tego typu "granice w nieskończoności" obliczamy w sposób niemal identyczny jak granice ciągów liczbowych. Dzieląc licznik i mianownik we wzorze (7*) przez x i korzystając z reguły włączania pod pierwiastek otrzymujemy:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+4}{\sqrt{4x^2+x}+5x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{3x}{x}+\frac{4}{x}}{\frac{\sqrt{4x^2+x}}{x}+\frac{5x}{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+\frac{4}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2+x}{x^2}}+5}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+\frac{4}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+5}\right) = \frac{3+0}{\sqrt{4+0}+5} = \frac{3}{7},$$

ponieważ przy $x \to +\infty$ mamy:

$$\frac{4}{x} \to 0, \qquad \frac{1}{x} \to 0$$

(zobacz tekst **Teoria13** "pożyteczne wzory").

Odpowiedź: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{3}{7}$.

ZADANIE 9. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, gdzie

$$f(x) = \frac{3x+4}{\sqrt{4x^2+1}+5x}. \tag{8*}$$

Rozwiązanie. Zadanie wygląda na niemal identyczne z poprzednim - i takie jest, z jedną modyfikacją. Mianowicie, skoro obliczamy granicę przy $x \to -\infty$, to argument x jest teraz liczbą ujemną, a w takim razie obowiązuje inna reguła przy włączaniu pod pierwiastek. Dla ujemnych x-ów

$$\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x} \neq \sqrt{\frac{4x^2+x}{x^2}},$$

a poprawne włączanie pod pierwiastek wykonujemy zgodnie z regułą:

$$\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x} = -\frac{\sqrt{4x^2+1}}{-x} = -\sqrt{\frac{4x^2+x}{(-x)^2}} = -\sqrt{\frac{4x^2+x}{x^2}}.$$

Uwzględniając to oraz dzieląc licznik i mianownik we wzorze (8*) przez x otrzymujemy:

$$\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{3x+4}{\sqrt{4x^2+x}+5x}\right) = \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{\frac{3x}{x}+\frac{4}{x}}{\frac{\sqrt{4x^2+x}}{x}+\frac{5x}{x}}\right) = \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{3+\frac{4}{x}}{-\sqrt{\frac{4x^2+x}{x^2}}+5}\right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{3+\frac{4}{x}}{-\sqrt{4+\frac{1}{x}}+5}\right) = \frac{3+0}{-\sqrt{4+0}+5} = \frac{3}{3} = 1,$$

ponieważ przy $x \to -\infty$ mamy:

$$\frac{4}{x} \to 0, \qquad \frac{1}{x} \to 0$$

(zobacz tekst **Teoria13** "pożyteczne wzory").

Odpowiedź: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

ZADANIE 10. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^4-2x^5-3x^6}{x^4+3x^3-5x^2-3}\right)$.

Rozwiązanie. Dzieląc licznik i mianownik we wzorze

$$f(x) = \frac{3x^4-2x^5-3x^6}{x^4+3x^3-5x^2-3}$$

przez x w potędze o najwyższym wykładniku sposród występujących w mianowniku, czyli przez x^4, otrzymujemy:

$$\frac{3x^4-2x^5-3x^6}{x^4+3x^3-5x^2-3} = \frac{\frac{3x^4}{x^4}-\frac{2x^5}{x^4}-\frac{3x^6}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}+\frac{3x^3}{x^4}-\frac{5x^2}{x^4}-\frac{3}{x^4}} = \frac{3-2x-3x^2}{1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^4}} =$$

$$= \frac{x^2\left(\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}-3\right)}{1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^4}} = x^2\cdot\left(\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}-3}{1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^4}}\right).$$

Korzystając z twierdzenia o działaniach na granicach skończonych (zob. tekst **Teoria12**, twierdzenie **1**) oraz z odpowiedniego podpunktu twierdzenia o działaniach na granicach niewłaściwych (zob. tekst **Teoria12**, twierdzenie **4**) otrzymujemy:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot\left(\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}-3}{1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^4}}\right)\right] = -\infty,$$

ponieważ przy $x\to+\infty$ mamy oczywiście

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty,$$

natomiast

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}-3}{1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^4}}\right) = \frac{-3}{1} = -3,$$

gdyż przy $x\to+\infty$ mamy:

$$\frac{3}{x^2}\to 0,\quad \frac{2}{x}\to 0,\quad \frac{3}{x}\to 0,\quad \frac{5}{x^2}\to 0,\quad \frac{3}{x^4}\to 0$$

(zobacz tekst **Teor13** "pożyteczne wzory").

Odpowiedź: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^4-2x^5-3x^6}{x^4+3x^3-5x^2-3}\right)=-\infty$ (granica niewłaściwa).

ZADANIE 11*. Na podstawie definicji zbadać granicę $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+9}{\sqrt{x+6}}\right)$.

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji jest tutaj zbiór $D=(-6,+\infty)$ (musi być spełniony warunek: $x+6>0$ ze względu na istnienie pierwiastka, a także z uwagi na to, że nie może być zera w mianowniku). Liczba $x_0=3$ należy do zbioru D i jest jego punktem skupienia. Wybieramy (zobacz tekst **Teoria10**, Definicja **1**) dowolny ciąg (x_n), $n\in\mathbb{N}_1$, taki, że:

$x_n\in D$ dla każdego $n\in\mathbb{N}_1$,
$x_n\neq 3$ dla każdego $n\in\mathbb{N}_1$,
$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3.$
Obliczamy:

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n+9}{\sqrt{x_n+6}}\right)=\frac{3+9}{\sqrt{3+6}}=4$$

ze względu na znane własności granic ciągów zbieżnych.

Odpowiedź: Granica istnieje i $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+9}{\sqrt{x+6}}\right)=4.$

ZADANIE 12*. Na podstawie definicji zbadać granicę $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$, gdzie

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & gdy\ x>2,\\[2mm] \dfrac{x}{x^2+1}, & gdy\ x\leq 2.\end{cases}\qquad (*)$$

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji jest tutaj zbiór $D=\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych. Obliczamy najpierw granicę prawostronną na podstawie definicji (zob. tekst **Teoria10**, Definicja **2**). Wybieramy dowolny ciąg (x_n), $n\in\mathbb{N}_1$, taki, że:

$x_n>2$ dla każdego $n\in\mathbb{N}_1$,
$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2.$
(Warunek: $x_n\in D$ dla każdego $n\in\mathbb{N}_1$ jest tu spełniony, skoro $D=\mathbb{R}$.) Obliczamy granicę pamiętając o tym, że skoro $x_n>2$, to "działa" pierwszy ze wzorów (*):

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{2}.$$

Zatem

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Obliczamy teraz granicę lewostronną na podstawie definicji (zob. tekst **Teoria10**, Definicja **3**). Wybieramy dowolny ciąg (x_n), $n \in \mathbb{N}_1$, taki, że:

$x_n < 2$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$,

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2.$

Obliczamy granicę pamiętając o tym, że skoro $x_n < 2$, to "działa" drugi ze wzorów (*):

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_n^2+1} = \frac{2}{2^2+1} = \frac{2}{5}.$$

Zatem

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{2}{5}.$$

Oczywiście $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{5}$, czyli

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x),$$

co świadczy o tym, że badana granica nie istnieje (zob. tekst **Teoria11**, Fakt **1**).

Odpowiedź: Granica nie istnieje.

ZADANIE 13*. Dla jakiej wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ funkcja określona wzorami:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & dla \quad x > 2, \\ x+p & dla \quad x \leq 2 \end{cases} \tag{9*}$$

jest ciągła w zbiorze $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych?

Rozwiązanie. Funkcja jest ciągła w każdym punkcie x różnym od punktu $x_0 = 2$. Wystarczy więc znaleźć taką wartość parametru p, dla której funkcja będzie ciągła w punkcie $x_0 = 2$. Zgodnie z definicją ciągłości funkcji w punkcie (zob. tekst **Teoria10**, definicja **4**) będzie tak wtedy, gdy będzie istnieć granica funkcji w punkcie 2, równa wartości funkcji w tym punkcie.

Jak wynika z drugiego ze wzorów (9*), wartość funkcji w punkcie 2 jest równa

$$f(2) = 2 + p.$$

Granicę lewostronną funkcji f w punkcie 2 także wyznaczamy korzystając z drugiego ze wzorów (9*):

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x+p) = 2+p.$$

Granicę prawostronną funkcji f w punkcie 2 wyznaczamy korzystając z pierwszego ze wzorów (9*):

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2^+} \left[\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 2^+} (x+2) = 2+2 = 4.$$

Skoro ma istnieć granica $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, to te granice powinny być równe (zob. tekst **Teoria11,** fakt **1**), czyli powinna zachodzić równość:

$$2+p=4,$$

skąd otrzymujemy: $p=2$.

Odpowiedź: Funkcja jest ciągła w zbiorze $\mathbb{R}$ dla $p=2$.

Kartkówka 4. Obliczanie pochodnych, styczne do wykresu - przykładowe zadania

ZADANIE 1. Wyznaczyć pochodną funkcji $f(x) = 3x^2\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} - \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}}$.

Rozwiązanie. Zaczynamy od przedstawienia funkcji w postaci sumy funkcji potęgowych, czyli składników postaci: cx^a (a więc bez użycia symbolu pierwiastka). Ponieważ

$$x^2\sqrt{x} = x^2x^{\frac{1}{2}} = x^{2+\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}},$$

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x}} = \frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^0}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{2-\frac{1}{2}} + x^{0-\frac{1}{2}} =$$

$$= x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}},$$

więc

$$f(x) = 3x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{3}} - \left(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) = 3x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}.$$

Możemy teraz skorzystać ze wzoru na pochodną funkcji potęgowej:

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

(zob. tekst **Teoria15**, wzór (5)), a także z twierdzenia o pochodnej sumy i różnicy i ze wzoru

$$(cf(x))' = c \cdot f'(x)$$

(zob. tekst **Teoria14**, Twierdzenie **3**). Mamy:

$$\left(x^{\frac{5}{2}}\right)' = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}},$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},$$

$$\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}},$$

$$\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}},$$

więc

$$f'(x) = \left(3x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= 3 \cdot \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} + 2 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - \left(-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \right) =$$

$$= \frac{15}{2} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} x^{-\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}.$$

Można (ale nie jest to konieczne) zapisać wynik używając symboli pierwiastków i wtedy wygląda on tak oto:

Odpowiedź: Pochodna funkcji f jest równa

$$f'(x) = \frac{15\sqrt{x^3}}{2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

ZADANIE 2. Wyznaczyć pochodną funkcji $f(x) = 3\sqrt{x} \sin x$.

Rozwiązanie. Rozważana funkcja jest iloczynem dwóch innych funkcji, więc zastosowanie znajdzie tu wzór na pochodną iloczynu (zob. tekst **Teoria14**, Twierdzenie **3**). Z niego, a także z tabeli pochodnych funkcji elementarnych (zob. tekst **Teoria15**) otrzymujemy:

$$f'(x) = \left(3\sqrt{x} \sin x\right)' = \left(3\sqrt{x}\right)' \cdot \sin x + 3\sqrt{x} \cdot (\sin x)' =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x + 3\sqrt{x} \cos x = \frac{3 \sin x}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} \cos x.$$

Odpowiedź: $f'(x) = \dfrac{3 \sin x}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} \cos x.$

ZADANIE 3. Wyznaczyć pochodną funkcji $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{3x + 1}.$

Rozwiązanie. Rozważana funkcja jest ilorazem dwóch innych funkcji, więc zastosowanie znajdzie tu wzór na pochodną ilorazu (zob. tekst **Teoria14**, Twierdzenie **3**). Z niego, a także z tabeli pochodnych funkcji elementarnych (zob. tekst **Teoria15**) otrzymujemy:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + 2x}{3x + 1} \right)' = \frac{(x^2 + 2x)' \cdot (3x + 1) - (x^2 + 2x) \cdot (3x + 1)'}{(3x + 1)^2} =$$

$$= \frac{(2x+2)(3x+1) - (x^2+2x) \cdot 3}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2+8x+2-3x^2-6x}{(3x+1)^2} =$$

$$= \frac{6x^2+8x+2-3x^2-6x}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2+2x+2}{(3x+1)^2}.$$

Odpowiedź: $f'(x) = \dfrac{3x^2+2x+2}{(3x+1)^2}$.

ZADANIE 4. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ w punkcie o odciętej $x_0 = \pi$.

Rozwiązanie. Jedyne, co tu trzeba zrobić, to zastosować wzór z tekstu **Teoria16** - równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie o odciętej x_0 :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \qquad (3^*)$$

oraz skorzystać z tabelki pochodnych funkcji elementarnych (tekst **Teoria15**)). Ustalamy dane:

$$x_0 = \pi,$$
$$f(x) = \sin x, \qquad f(x_0) = \sin \pi = 0,$$
$$f'(x) = \cos x, \qquad f'(x_0) = \cos \pi = -1,$$

więc ze wzoru (3*) otrzymujemy:

$$y = (-1)(x - \pi) + 0,$$

czyli odpowiedź wygląda następująco:

Odpowiedź: Szukane równanie ma postać: $y = -x + \pi$.

ZADANIE 5. Pod jakim kątem styczna do wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 1$ przecina oś OX ?

Rozwiązanie. Poza wzorem z tekstu **Teoria16** jedyne, co trzeba uwzględnić, to fakt, że prosta o równaniu $y = ax + b$ tworzy z osią OX, a dokładniej - z jej dodatnią częścią taki kąt φ, którego tangens jest równy a :

$$\mathrm{tg}\varphi = a.$$

(Potocznie mówi się, że prosta przecina oś OX pod kątem φ, i o ten kąt chodzi w zadaniu.)

Dane do napisania równania stycznej ustalamy jak w zadaniu **4**, przy czym pochodną funkcji f obliczamy jak w zadaniu **3**:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{(x)' \cdot (x+1) - x \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Wobec tego mamy:

$$x_0 = 1,$$

$$f(x) = \frac{x}{x+1}, \qquad f(x_0) = \frac{1}{2},$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, \qquad f'(x_0) = \frac{1}{4},$$

więc ze wzoru (3*) otrzymujemy:

$$y = \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}.$$

Wynika stąd odpowiedź.

Odpowiedź: Styczna do wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 1$ przecina oś OX pod takim kątem φ, że $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{1}{4}$.